

Funkcinės lygtys. B lygis

Įvadas

Norint nagrinėti funkcinių lygčių sprendimo temą, reikia prisiminti keletą sąvokų ir teiginių iš mokyklinio matematikos kurso.

Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra dvi aibės. Funkcija – tai dėsni (taisyklė), pagal kurią kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis Y aibės elementas.

Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcijos f apibrėžimo sritis simetriška nulinio atžvilgiu, t. y. jei $x \in X$, tai ir $-x \in X$. Funkcija, tenkinanti šio apibrėžimo sąlygą $f(-x) = f(x)$, vadinama lygine, o $f(-x) = -f(x)$ – ne-lygine.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama periodine, jei egzistuoja toks $T \neq 0$, kad su kiekvienu x iš apibrėžimo srities skaičiai $x - T$ ir $x + T$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir galioja lygybė $f(x + T) = f(x)$. Skaičius T vadinamas funkcijos f periodu.

Apibrėžimas. Funkciją $f: A \rightarrow B$ vadinsime monotone, jei ji yra arba nedidėjanti, arba nemažėjanti, t. y. arba $f(x) \leq f(y)$ su visais $x > y$ ($x, y \in A$), arba $f(x) \geq f(y)$ su visais $x > y$ ($x, y \in A$).

Apibrėžimas. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ vadinama injektyviaja, arba injekcija, jeigu su visais $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$. Jei $f(x_1) = y$ ir $f(x_2) = y$, tai išeina, kad $x_1 = x_2$ (jei su visais x_1, x_2 ir $x_1 \neq x_2$ turime $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Apibrėžimas. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ vadinama surjektyviaja, arba surjekcija, jeigu bet kuriam $y \in Y$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $f(x) = y$.

Apibrėžimas. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ vadinama bijektyviaja, arba bijekcija, jeigu ji yra ir injektyvi, ir surjektyvi.

Pagrindiniai funkcinių lygčių sprendimo metodai:

1. Keitimo metodas.
2. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas.
3. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas.
4. Neapibrėžtų koeficientų metodas.
5. Koši funkcinės lygties metodas.

II. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas

Bene lengviausias funkcinių lygčių sprendimo būdas yra **manipuliavimas funkcijos apibrėžimo sritimi**. Šio metodo esmė yra pakeisti kintamąjį ko-
kia nors skaitine reikšme. Ši reikšmė dažniausiai kinta intervalu $[-2 \dots 2]$.

1 pavyzdys.

Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenkina lygybę $f(f(x) + x) = x$. Raskite $f(0)$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \rightarrow 0$, turime $f(f(0) + 0) = 0$, x pakeitę į $f(0)$, turime $f(f(f(0)) + f(0)) = f(0)$, $\Rightarrow f(f(0)) = f(0)$. Kairė lygybės pusė lygi nuliui, todėl $f(0) = 0$.

Atsakymas – $f(0) = 0$.

2 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ir $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį $f(x) \cdot g(y) = x + y + 1$, kai $x, y \in \mathbb{R}$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \rightarrow 0$ ir $y \rightarrow 0$, turime $f(0) \cdot g(0) = 1$. Taigi $f(0)$ ir $g(0)$ reikšmės nėra lygios 0. Atlikę keitinį $x \rightarrow 0$ ir $y \rightarrow -1$, turime $f(0) \cdot g(-1) = 0$. Kadangi $f(0) \neq 0$, tai $g(-1) = 0$. Atlikę keitinį $x = -1, y = -1$, turime, kad $f(-1) \cdot g(-1) = -1$, o tai prieštarauja, kad $g(-1) = 0$. Vadinasi, tokių funkcijų nėra.

Atsakymas – tokių funkcijų nėra.

3 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, kai $x, y \in \mathbb{R}$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \rightarrow 0$ ir $y \rightarrow 0$, turime $f^2(0) = f(0)$, t. y. $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Išnagrinėkime abu atvejus, kai $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Jei $f(0) = 0$, tai įstatę į pradinę lygtį $x = 0$, turime, kad $y = 0$, todėl ši lygybė jokiai funkcijai negalioja su visomis realiosiomis y reikšmėmis. Lieka nagrinėti atvejį, kai $f(0) = 1$. Įstatę į pradinę lygtį $x = 0$, turime $f(y) = y + 1$, $\Rightarrow f(x) = x + 1$. Patikrinę matome, kad ši funkcija $f(x) = x + 1$ tenkina lygtį.

Atsakymas – $f(x) = x + 1$.

4 pavyzdys.

Raskite funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį $(x+y)(f(x)-f(y)) = f(x^2) - f(y^2)$, kai $x, y \in \mathbb{R}$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $y \rightarrow 0$, turime $x(f(x)-f(0)) = f(x^2) - f(0)$. (1)

Atlikę keitinį $y \rightarrow 1$, turime $(x+1)(f(x) - f(1)) = f(x^2) - f(1)$. (2) Iš antros lygybės atėmę pirmą, turime

$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ su visais x , todėl $f(x) = ax + b$, kai $a = f(1) - f(0)$ ir $b = f(0)$. Įstatę į pradinę lygtį matome, kad lygybė yra teisinga su visomis realiosiomis a ir b reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = ax + b$, kai $a, b \in \mathbb{R}$.

5 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tokias, kad su visais teigiamais x, y galiojūt lygybė $f(x-y) = f(x) + y$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $y \rightarrow x$, turime $f(0) = f(y) + y$, atlikę kitą keitinį $y \rightarrow x$, turime $f(0) = f(x) + x$, taigi su visais teigiamais x galioja $f(x) = -x + f(0)$. Atlikę keitinį $y \rightarrow 2x$, turime $f(-x) = f(x) + 2x = (-x + f(0)) + 2x = x + f(0)$, taigi su visais neigiamais x taip pat galioja lygybė $f(x) = -x + f(0)$. Reikia surasti $f(0)$. Pasižymėję $f(0) = c$, gauname $f(x) = -x + c$. Įstatę funkciją $f(x) = -x + c$ į pradinę lygybę, matome, kad lygybė yra teisinga su visomis realiosiomis c reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = -x + c$, kai $c \in \mathbb{R}$.

Uždaviniai

1. Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį $f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y))$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

2. Išspręskite funkcinę lygtį $f^2(x) + f(x) \cdot f(y) = x^2 + xy$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

Funkcinės lygtys. B lygis

3. Raskite visas funkcijas $f(x)$, tenkinančias lygybę $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, kai $x, y \geq 0$, $f(2) = 0$, $f(x) \neq 0$, kai $x \in [0; 2)$.

4. Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkinančias lygybę $f(x + f(y)) = f(f(x)) + y$, kai $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

5. Raskite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkinančias lygybę $f(x + y) = 2^y f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.